සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

0392

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

**උසස් ගණිතය I**
**உயர் கணிதம் I**
**Higher Mathematics I**

| 11 | |
|---|---|
| S | I |

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (අ) $A$ හා $B$ යනු $S$ සර්වත්‍ර කුලකයේ උපකුලක දෙකක් යයි ගනිමු. ඔබ උපයෝගී කර ගන්නා වූ කුලක වීජයේ නියම සඳහන් කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$A - B = A - (A \cap B)$$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) $\rho = \{(x, y) : x,\ y \in \mathbb{N}$ හා 5 න් $(x - y)$ බෙදෙනු ලැබේ. $\}$

යයි ගනිමු.

$\rho$ යනු $\mathbb{N}$ මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න.

$\rho$ මගින් $\mathbb{N}$ කුලකය, කුලක කොපමණ සංඛ්‍යාවකට විභාගනය කරයි ද?

$\rho'$ මගින් $\mathbb{N}$ කුලකය, කුලක 100 කට විභාගනය කරන පරිදි $\mathbb{N}$ මත $\rho'$ සම්බන්ධයක් ලියා දක්වන්න.

(ඇ) ඕනෑම $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x + k) = f(x)$ වන අයුරින් $k$ නියතයක් පවතී නම් $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යනු ආවර්තක ශ්‍රිතයක් යයි කියනු ලැබේ. $k$ හි අඩුතම ධන අගයට (එය පවතී නම්) $f$ හි ආවර්තය යයි කියනු ලැබේ.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යන්න $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = \sin^2 x$ මගින් අර්ථ දක්වේ යයි ගනිමු.

$g$ ආවර්තක බව පෙන්වා එහි ආවර්තය සොයන්න.

$g$ හා $h$ ට එකම ආවර්තය ද, $g + h$ ට ආවර්තයක් නොමැති ද වන අයුරින් $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ආවර්තක ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

2. (අ) $\Delta = \begin{vmatrix} x & b & c \\ a & y & c \\ a & b & z \end{vmatrix}$ යයි ගනිමු.

$\Delta = a(y - b)(z - c) + b(x - a)(z - c) + z(x - a)(y - b)$ බව පෙන්වන්න.

$x \neq a,\ \ y \neq b,\ \ z \neq c$ හා $\Delta = 0$ නම්

$$\frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} + \frac{z}{z-c} = 2$$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ හා $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ යයි ගනිමු.

$MX = \lambda X$ සමීකරණයේ $X$ ට නිශ්ශුන්‍ය විසඳුමක් තිබීම සඳහා $\lambda$ හි අගයයන් සොයන්න. $\lambda$ හි අගයයන් එක එකකට අනුරූප $X$ තීර දෛශිකයක් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්‍යක්‍රමයකින් හෝ $X' = MX$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලබන, $xy$-තලයේ ඒකජ පරිණාමනය යටතේ අවිචලක වන, මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛා වල සමීකරණ සොයන්න; මෙහි $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ වේ.

[ අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) ඕනෑම $n$ ධන නිඛිලයක් හා තාත්ත්වික $\theta$ සඳහා $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ බව සාධනය කරන්න.

$z^6 = -1$ සමීකරණයේ මූල හය, $x$ හා $y$ හි අගයයන් දෙමින් $x + iy$ ආකාරයට ලබාගන්න.

$z^4 - z^2 + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල හතර අපෝහනය කර ආගන්ඩ් තලය මත ඒවා යේ පිහිටීම් පෙන්වන්න.

මෙම මූල හතර වෘත්තයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

(ආ) $P$ ලක්ෂ්‍යය ආගන්ඩ් තලය මත $z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන බව ද,

$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව ද, දී ඇති විට $P$ හි පථය සම්පූර්ණයෙන් විස්තර කරන්න.

4. (අ) $a \in \mathbb{R}$ හා

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & , \ x < 0 \text{ නම්} \\ \\ \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x} & , \ x > 0 \text{ නම්} \end{cases}$$

යයි ගනිමු.

$\lim_{x \to 0} f(x)$ පවතී යයි දී ඇත. $a$ හි අගය සොයන්න.

$x = 0$ දී $f$ සන්තතික වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යනු

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \text{ නම්} \\ \\ xf(x) & , \ x \neq 0 \text{ නම්} \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇති ශ්‍රිතය යයි ගනිමු.

$x = 0$ දී $g$ අවකල්‍ය බව පෙන්වා $g'(0)$ සොයන්න.

(ආ) $x \neq 0, 2$ සඳහා $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ යයි ගනිමු.

$h$ වැඩිවන හෝ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යයන් හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = h(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = h(x)$ හි ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කර ගනිමින් $y = |h(x)|$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$x \neq 0, 2$ සඳහා $|h(x)| = \dfrac{(x-1)^2}{|x^2 - 2x|}$ බව පෙන්වා $y = |h(x)|$ හි ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කර ගනිමින්

$(x-1)^2 e^x = |x^2 - 2x|$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික විසඳුම් සංඛ්‍යාව ලබාගන්න.

5. (අ) සුදුසු ත්‍රිකෝණමිතික ආදේශයක් උපයෝගී කරගනිමින්

$$\int \frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \tan^{-1}x + \frac{x}{x^2+1} + C$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $C$ යනු අභිමත නියතයකි.

$u = x + \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ ආදේශය උපයෝගී කරගනිමින්

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2x-1}}$$ සොයන්න.

(ආ) (i) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න.

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x+3}{\sin x + \cos x}\,dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

6. (අ) $u = \frac{1}{y}$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින්, $x = 0$ විට $y = \frac{a}{2b}$ අවශ්‍යතාවයට යටත් ව

$\frac{dy}{dx} = ay - by^2$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න; මෙහි $a, b > 0$ වේ.

y කිසිම විටක $\frac{a}{b}$ නොඉක්මවන බව පෙන්වන්න.

(ආ) සුදුසු ආදේශයක් උපයෝගී කර ගනිමින්

$\left(x^2 + 2xy\right)\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ඇ) $xy$ - තලයේ $C$ වක්‍රයක් මත $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය $x$ - අක්ෂය $Q$ හි දී හමු වේ. $P$ හා $Q$ අතර දුර $\sqrt{y^2 + \frac{4(y-2)^2}{x^2}}$ බව ද, $C$ වක්‍රය $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව ද දී ඇත. $C$ වක්‍රය සඳහා සමීකරණයක් සොයන්න.

[ අනෙක් පිට බලන්න.

7. $a^2l^2 + b^2m^2 = 1$ නම් $lx + my = 1$ රේඛාව $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය $\left(a^2l,\, b^2m\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න; මෙහි $a, b, l$ හා $m$ තාත්ත්වික නියත වේ.

$\left(x_0, y_0\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\left(x_1, y_1\right)$ බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක යුගලයේ ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

$p$ යනු $P\left(a^2\alpha,\, b^2\beta\right)$ බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක වල ස්පර්ශ ජ්‍යාය වේ ; මෙහි $\alpha$ සහ $\beta$ තාත්ත්වික නියත වේ.

$L$ හා $M$ යනු පිළිවෙළින් $O$ මූල ලක්ෂ්‍යය හා $P$ සිට $p$ ට ඇඳි ලම්බවල අඩි වේ. $OL.\, PM = k^2$ නම්

$p$ රේඛාව $\frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} = 1$ ඉලිප්සය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

8. සුපුරුදු අංකනයෙන් $l_1$ හා $l_2$ රේඛාවල දෛශික සමීකරණ පිළිවෙළින්

$\mathbf{r} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + \lambda\left(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right)$ හා

$\mathbf{r} = -\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + \mu\left(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$ වේ; මෙහි $\lambda$ හා $\mu$ පරාමිති වේ.

(i) $l_1$ හා $l_2$ රේඛා සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වන බව පෙන්වා $l_1$ හා $l_2$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන $A$ හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

(ii) $A$ ලක්ෂ්‍යය හා පිහිටුම් දෛශිකය $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $l_3$ සරල රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය සොයන්න ; මෙහි $\alpha$ හා $\beta$ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(iii) $l_3$ රේඛාව $l_1$ හා $l_2$ අඩංගු තලය සමග $\theta$ කෝණයක් සාදයි නම් $\alpha$ හා $\beta$ ඇසුරෙන් $\sin\theta$ සොයන්න.

$l_1$, $l_2$ හා $l_3$ ඒක තල නම් $4\alpha + 5\beta = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

9. (අ) $f(\theta) = \frac{1 + \sin 2\theta}{5 + 4\cos 2\theta}$ යයි ගනිමු.

$\theta$ යන්න $\frac{\pi}{2}$ හි ඔත්තේ ගුණාකාරයක් නොවේ නම් $\frac{(p + \tan\theta)^2}{q + \tan^2\theta}$ ආකාරයට $f(\theta)$ ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි $p$ හා $q$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$\theta$ හි සියලු අගයයන් සඳහා $0 \le f(\theta) \le \frac{10}{9}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $x$ සඳහා

$\tan^{-1}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$ සමීකරණය විසඳන්න.

$\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.